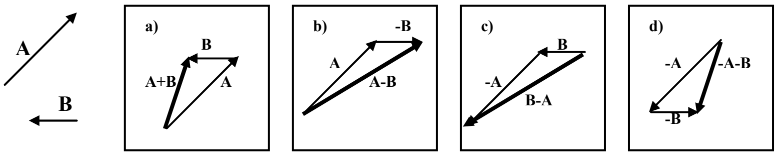
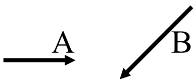
OPERACIONES GEOMÉTRICAS CON VECTORES

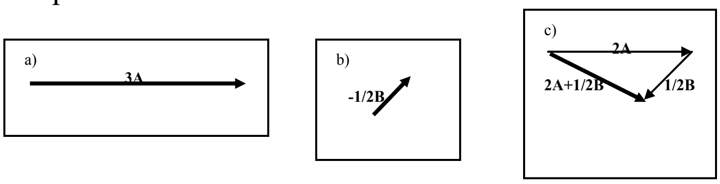
1- Dado los vectores **A** y **B** indicados en el gráfico, construir los vectores:
a) **A + B** ; b) **A – B** ; c) **B – A** ; d) **– A – B**
Respuesta:



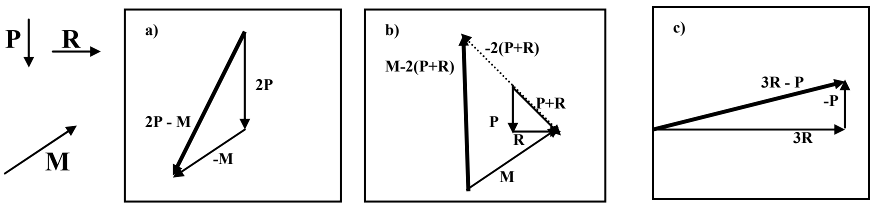
2- Conociendo los vectores **A y B** construir en forma gráfica los vectores:
a) **3A** b) **– ½ B** c) **2A + ½B**



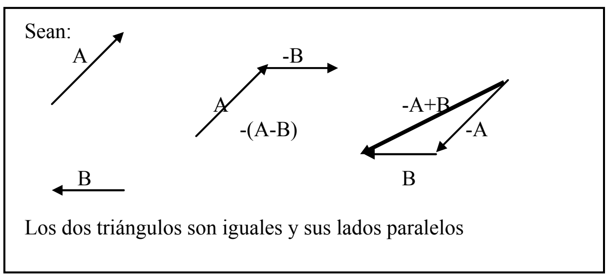
Respuesta:



3- Dado los vectores de la figura, encontrar los vectores:
a) 2**P** – **M** b) **M** – 2(**P** + **R**) c) 3**R** – **P**
Respuesta:



4- Demostrar gráficamente que: **– (A – B) = – A + B**
Respuesta:

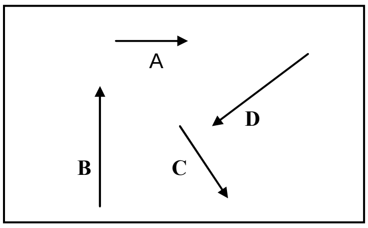


EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

5- Dados los vectores **A, B, C** y **D** representados en la figura, construir los vectores:

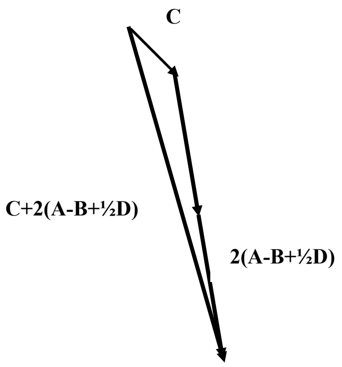
a) **C** + 2 (**A** – **B** + ½ **D**)

b) 3**A** – 2**B** – (**C** – **D**)

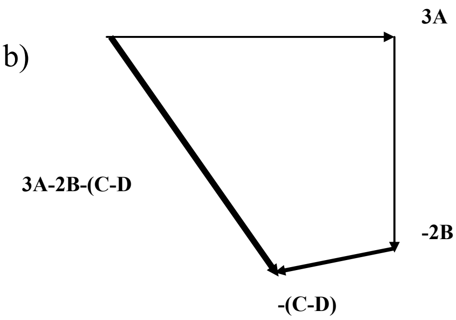


Respuesta:

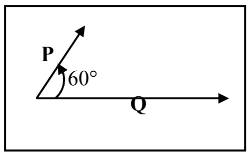
a)



b)



6- Sabiendo que los vectores **Q** y **P** forman un ángulo de 60°, determinar el ángulo formado por los vectores indicados abajo, en el orden dado y en el sentido positivo del ángulo (el sentido positivo del ángulo se toma considerando el giro contrario a las manecillas del reloj):



a) **P** y **–Q** b) **Q** y **–P** c) **–P** y **–Q** d) –**2Q** y **2P**

Respuesta:

a) 120° = – 240° b) –120° = +240°

c) 300° = – 60° d) 240° = – 60°

7- Demostrar que en un triángulo cualquiera, la recta que une los puntos medios de dos lados, es paralela al tercer lado e igual a la mitad

8- Demostrar gráficamente que: **– (A – B) = – A + B**

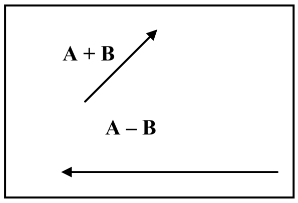
9- Siendo **A** y **B** dos vectores no paralelos en un plano, demostrar las desigualdades:

a) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ b) $|\mathbf{A}-\mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$

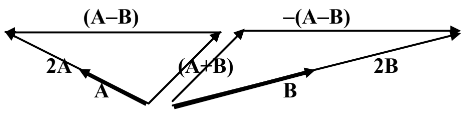
EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

10- Demostrar la desigualdad: $|\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|$

11- Sabiendo que los vectores de la figura representan la suma y deferencia de los vectores **A** y **B**. Hallar gráficamente estos vectores



Respuesta:



12- Demostrar vectorialmente que el vector que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralelo a las bases e igual a la mitad de la suma de las bases.

13- ¿Qué condiciones deben satisfacer los vectores **A** y **B** para que existan las siguientes relaciones?
a) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = |\mathbf{A}-\mathbf{B}|$ b) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| > |\mathbf{A}-\mathbf{B}|$ c) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| < |\mathbf{A}-\mathbf{B}|$
d) el vector **A+B** tenga la dirección de la bisectriz del ángulo formado por los vectores **A** y **B**.

Respuesta:

a) $\alpha = 90°$
b) $\alpha < 90°$
c) $90° < \alpha < 180°$
d) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$

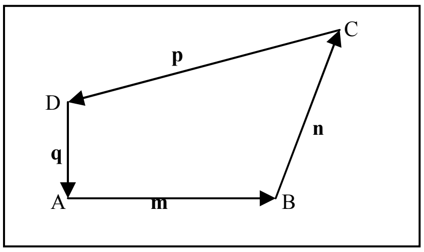
14- Demostrar la igualdad vectorial: **OA + OB + OC = OP + OQ + OR**, siendo O un punto interior cualquiera del triángulo ABC y P, Q, R los puntos medios de los lados AB, BC, CA, respectivamente.

15- Determinar la condición que debe cumplir el vector **A + B** , para que su dirección sea la de la bisectriz del ángulo formado por los vectores **A** y **B.**

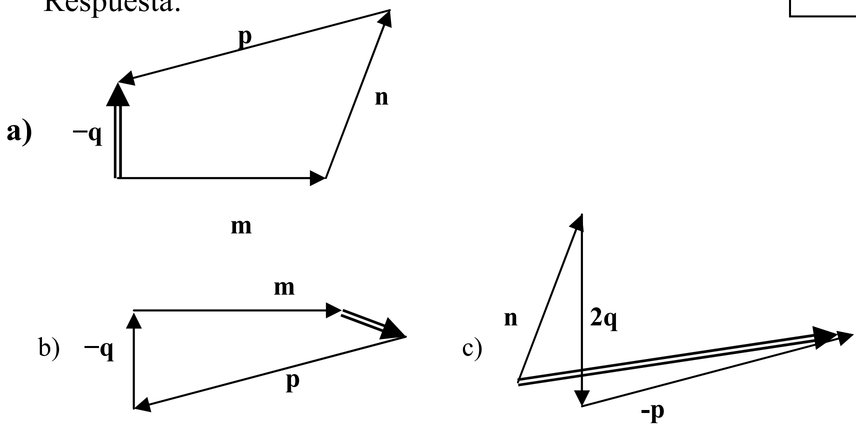
Respuesta: Para que el vector **A** + **B** tenga la dirección de la bisectriz del ángulo formado por los vectores **A** y **B** , se debe cumplir: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$. En otras palabras, los vectores **A** y **B** deberán representar a los lados de un rombo.

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

16- En el cuadrilátero ABCD de la figura, se dan los vectores que coinciden con sus aristas: **AB = m ; BC = n ; CD = p ; DA = q.** Construir los vectores siguientes:
a) **m + n + p** b) **p − q + m** c) **n + 2q − p**



Respuesta:



VECTORES DE POSICIÓN – OPERACIONES ANALÍTICAS CON VECTORES

17- Sean los vectores: **X** = 3 **i** – 2 **j** + 4 **k ; Y** = – **i** – **j** + **k ; Z** = **i** – 3 **j** – 2 **k ,** determinar los vectores:
a) **X** + **Y** + **Z ;** b) – **X** + **Y** – **Z** ; c) **X** – **Y** – **Z**
Respuesta: a) **X** + **Y** + **Z** = 3 **i** – 6 **j** + 3 **k**
b) – **X** + **Y** – **Z** = (–5; 4; –1) = –5 **i** + 4 **j** – **k**
c) **X** – **Y** – **Z** = (3; 2; 5) = 3 **i** + 2 **j** + 5 **k**

18- Dado los vectores: **P** = 3 **i** – 2 **j** + 4 **k ; Q** = – **i** – **j** + **k ; R** = **i** – 3 **j** – 2 **k ;** determinar los vectores:
a) 2 **P** + 3 **Q** ; b) **P** – 2 **Q** + 5 **R ;** c) **Q** – 2 **P**
Respuesta: a) 2 **P** + 3 **Q** = (3; –7; 11) = 3 **i** – 7 **j** + 11 **k**
b) **P**–2**Q**+5**R** = (10; –15; –8) = 10 **i** – 15 **j** – 8 **k**
c) **Q** – 2 **P** = (–7; 3; –7) = – 7 **i** + 3 **j** – 7 **k**

19- Sean los vectores de posición **P = 2 i + 3 j – k** y **Q = 4 i – 3 j + 2 k**; determinar los vectores:
a) **PQ** b) **QP**
Respuesta: a) (2, – 6, 3); b) (–2, 6, –3)

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

20- Dados los puntos: A(–1; 3); B(2; 5) y C(3; –1), calcular: a) **OA – AB** b) **OC – BC** c) **3 BA – 4 CB**
Respuesta: a) (–4; 1); b) (2; 5); c) (–5; –30)

21- Conociendo los vectores de posición: **A** = (–1; 3); **B** = (1; 0) y **C** = (2; –1), encontrar el vector de posición **D**, tal que se cumpla: **DC = BA**
Respuesta: **D** = (4; –4)

22- Dados los puntos A(–1; 2; 3) y B(4; –2; 0), determinar un vector de posición **P,** tal que se cumpla: **AP = 3 AB**
Respuesta: **P =** (14; –10; – 6)

23- Determinar los números a y b de tal forma que los vectores: **P =** (4; 1; –3) y **Q** = (6; a; b) sean paralelos
Respuesta: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{9}{2}$

24- Conociendo los vectores: **X = i – 2j + k** ; **Y = 2i – 4k ; Z = – 4 i – 4 j +14k,** hallar los valores de a y b para que: **Z = a X + b Y**
Respuesta: a = 2; b = – 3

25- Determinar para que valores de α y β los vectores: **A = –2 i +3 j +**β **k** y **B =** α **i –6 j +2k** son colineales.
Respuesta: $\alpha = 4$; $\beta = -1$

26- Verificar si los puntos: A(3; –1; 2); B(1; 2; –1); C(–1; 1; –3) y D(3; –5; 3) son vértices de un trapecio.
Respuesta: **Sí ABCD es un trapecio**

27- Dados los puntos A(–1; 5; –10); B(5; –7; 8); C(2; 2; –7); D(5; –4; 2). Demostrar que los vectores **AB** y **CD** son colineales y determinar como tienen sus sentidos.

28- Para que valores de m y n los puntos P(3; 1; –2); Q(1; 5; 1) y R(m; n; 7) estarán en la misma línea recta.
Respuesta: m = –3 ; n = 13

29- Siendo **P** y **Q** dos vectores no paralelos y sabiendo que: **A** = (x +4y)**P** + (2x + y +1)**Q; B =** (y – 2x + 2)**P** + (2x – 3y + 1)**Q.** Hallar los valores de x e y para que: **3A = 2B**
Respuesta: $x = \frac{46}{43}$; $y = -\frac{15}{43}$

30- Dado dos vectores en un plano: **P = (2; –3)** y **Q = (1; 2)**, hallar la descomposición lineal del vector **A = (9; 4)** en función de los vectores **P** y **Q**.
Respuesta: A = 2 P + 5 Q

31- Dados tres vectores en el plano **A = (3; –2); B = (–2; 1)** y **C = (7; –4),** determinar la descomposición lineal de cada uno de estos tres vectores, tomando por base a los otros dos.
Respuesta:
a) Si el vector **A** depende linealmente de los vectores **B** y **C: A** = 2 **B** + **C**
b) Si el vector **B** depende linealmente de los vectores **A** y **C: B = (A – C)/2**
c) Si el vector **C** depende linealmente de los vectores **A** y **B: C = A** – 2 **B**

32- Se dan tres vectores: **A = (3; –1); B = (1; –2)** y **C = (–1; 7).** Determinar la descomposición del vector **P = A + B + C** mediante la base **A, B**.
Respuesta: P = 2 A – 3 B

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL ENTRE VECTORES

33- En cada uno de los casos siguientes determinar si los vectores son o no linealmente dependientes:
a) **A = 2i + j –3k ; B = i –4k ; C = 4i +3j –k**
b) **A = i –3 j +2k ; B = 2 i –4j + k ; C = 3i +2j –k**
Respuesta:
a) Linealmente dependientes.
b) Linealmente independientes

PUNTOS DE DIVISIÓN DE SEGMENTOS

34- Dados los puntos A(2; −5; 3) y B(−4; 1; 1), determinar las coordenadas del punto medio del segmento AB
Respuesta: $\vec{M} = (-1; 3; 2)$

35- Los vértices de un triángulo son los puntos A(3; −2; 3) ; B(−1; 2; 3) y C(−5; 0; −1). Determinar las coordenadas de los puntos medios de sus lados.
Respuesta: M(1;0; 3): punto medio de AB;
N(−1; −1; 2): punto medio de BC;
P(−1; −1; 2): punto medio de CA

36- Conociendo el punto medio de un segmento M(3; −4; 5), y uno de sus extremos A(−1; 2; −4), hallar las coordenadas del otro extremo.
Respuesta: B(5; −6; 6)

37- Hallar el punto simétrico de A(0; –1; 2) con relación al punto M(7; –1; 1).
Respuesta: Q(14; −3; 4)

38- Conociendo los puntos M(–1; 2; 0) y N(–1; –2; 4), determinar las coordenadas del punto P que esté situado en el segmento MN y a una distancia MP = ¼ MN.
Respuesta: P(–1; 1; 1)

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

39- Determinar las coordenadas de los extremos del segmento de recta que es dividido en tres partes iguales por los puntos P(2; 0; 2) y Q(5; –2; 0).
Respuesta: N(−1; 2; 4) y M(8; −4; −2)

40- El segmento de recta AB está dividido por la mitad en el punto P(–1; 3; –2) y uno de sus extremos es el punto A(–3; 0; 5). Hallar las coordenadas del otro punto extremo.
Respuesta: B(1; 6; −9)

PRODUCTO ESCALAR

41- Dados los vectores $\mathbf{A} = (4;-2;-4)$ y $B = (6; -3; 2)$, calcular:
a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ b) $2\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} + 2\mathbf{B})$ c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$
Respuesta: a) 22; b) 160; c) −13

42 - Dados los vectores $\mathbf{A = i - 5\,j + 3\,k}$ y $\mathbf{B = 6\,i + 3j - j}$, determinar:
a) $|\mathbf{A}|$ b) $|\mathbf{B}|$ c) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ d) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$
Respuesta: a) $|\mathbf{A}| = \sqrt{35}$; b) $|\mathbf{B}| = \sqrt{46}$; c) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{57}$ d) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{105}$

42- Hallar el módulo de la suma y de la diferencia de los vectores: $\mathbf{P} = (3; -5; 8)$; $\mathbf{Q} = (-1; 1; -4)$
Respuesta: $|P + Q| = 6$; $|P - Q| = 14$

43- Siendo $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, hallar:
a) $2\,\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\,\mathbf{C}$ b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$ c) $|3\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B} + 4\,\mathbf{C}|$
d) un vector unitario con la dirección y sentido del vector $3\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B} + 4\,\mathbf{C}$
Respuesta: a) $2\,A - B + 3\,C = 11\,i - 8\,k$; b) $|A + B + C| = \sqrt{93}$
c) $|3A\text{-}2B\text{+}4C| = \sqrt{398}$; d) $\dfrac{17i - 3j - 10k}{\sqrt{398}}$

44- Verificar si los puntos A(1; 0; –2); B(3; 5; –3); C(2; 7; 5) son vértices de un triángulo rectángulo.
Respuesta: Sí, es rectángulo en B

45- Demostrar que los puntos: A(0; 1; 1) ; B(4; 2; 1) y C(1; 3; 0) son vértices de un triángulo rectángulo.

46- Demostrar la "Propiedad distributiva del producto escalar, con respecto a la suma":
$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

47- Hallar el versor de igual dirección que el vector $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
Respuesta: $A_u = \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \dfrac{6i - 2j - 3k}{7}$

48- Dados los vértices de un triángulo A(2; –1; 4), B(3; 2; –6) y C(–5; 0; 2), calcular la longitud de la mediana trazada desde el vértice A
Respuesta: Mediana AP = 7

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

49- Hallar el versor de igual dirección que el vector **A** = (3; 4; –12)
Respuesta: $A_u = \frac{A}{|A|} = \frac{3i + 4j - 12k}{13}$

50- Dados los puntos en el espacio F(1; 2; 3); G(–6; –2; 3) y H(1; 2; 1); determinar el vector unitario que tenga la misma dirección y sentido contrario al vector: 3**GF** – 2**GH.**
Respuesta: $P_u = \frac{-P}{|P|} = \left(-\frac{7}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{4}{9}\right)$

51- Sobre un cuerpo puntual actúan las fuerzas: **F** = 2 **i** + 3 **j** –5 **k; G** = –5 **i** + **j** + 3 **k** ; **H = i** –2 **j** + 4 **k** y **M** = 4 **i** –3 **j** –2 **k**
Determinar: a) la fuerza resultante y b) el módulo de la resultante
Respuesta: a) La fuerza resultante es **R = 2 i – j**
b) $|R| = \sqrt{5}$

52- Conociendo el vector **C** = 16 **i** –15 **j** +12 **k**, determinar un vector **D**, que sea paralelo y de sentido opuesto al vector **C**, y que tenga módulo |**D**| = 75
Respuesta: D= – 48i + 45j – 36k

53- ¿Qué condición deben satisfacer los vectores **A** y **B** para que el vector **A + B** sea perpendicular al vector **A – B?**
Respuesta: Deben representar a los lados de un rombo.

54- Los vectores **A** = (2; –3; 6) y **B** = (–1; 2; –2), están aplicados a un mismo punto. Hallar las coordenadas del vector **C,** que tenga la dirección de la bisectriz del ángulo formado por **A** y **B**, y que |**C**| = $3\sqrt{42}$.
Respuesta: C = (–3; 15; 12)

55- Los vectores **A** y **B** son perpendiculares entre sí; el vector **C** forma con cada uno de ellos un ángulo de 60°; si |**A**|=3; |**B**|=5 y |**C**|=8 , calcular: a) **(3A – 2B).(B + 3C);** b) $(\mathbf{A + B + C})^2$ c) $(\mathbf{A + 2B - 3C})^2$
Respuesta: a) – 62; b) 162; c) 373

56- Determinar un vector **V** tal que sea paralelo al vector **Q** = (1; –1; 2) y se cumpla la relación: **V . Q** = – 18
Respuesta: **V = (–3; 3; –6)**

57- Sabiendo que |**A**|=|**B**|, determinar para qué valor de m los vectores: **(**m**A + B)** y **(A −** m**B)** son perpendiculares entre sí.
Respuesta: m = ± 1

58- Se dan los vértices de un cuadrilátero: A(1; –2; 2); B(1; 4; 0), C(–4; 1; 1) y D(–5; –5; 3). Demostrar que las diagonales AC y BD son perpendiculares.

59- Calcular el ángulo formado por los vectores: **M = 2 i – 4 j + 4 k** y **N = – 3 i + 2 j + 6 k**
Respuesta: α = 76° 13’ 33”

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

60- Calcular el módulo de los vectores **A + B** y **A – B** , conociendo: $|\mathbf{A}| = 4$, $|\mathbf{B}| = 3$ y el ángulo entre ellos: $\alpha = 60°$
Respuesta: $|\mathbf{A + B}| = \sqrt{37}$; $|\mathbf{A - B}| = \sqrt{13}$

61- Dados los vectores unitarios **X, Y, Z**, que satisfacen la condición: **X + Y + Z = 0,** calcular: **XY + YZ + ZX.**
Respuesta: X.Y + X.Z + Y.Z = –3/2

62- Sabiendo que $|\mathbf{U}| = 2$, $|\mathbf{V}| = 3$, y que estos vectores forman un ángulo de 135°, determinar: $|\mathbf{(2U – V).(U – 2V)}|$
Respuesta: $|(2U–V).(U–2V)| = |26 + 15\sqrt{2}|$

PRODUCTO VECTORIAL

63- Dados los vectores **A = (3; – 1; – 2)** y **B = (1; 2; –1)**. Hallar los productos vectoriales:
a) **AxB**; b) **(2A + B)xB** y c) **(2A – B)x(2A + B)**
Respuesta: a) AxB = 5 i + j + 7 k;
b) (2A+B)xB = 10 i + 2 j + 14 k;
c) (2A–B)x(2A+B) = 20 i + 4 j + 28 k

64- Dado los vectores: P = (2; –1; 1), M = (1; –1; 0) y Q = (–1; 2; 2) , hallar: a) P x (M – Q); b) 2P x 3Q y c) (M + Q) x (M – Q)
Respuesta: a) P x (M – Q) = 5 i + 6 j – 4 k
b) 2P x 3Q = – 24 i – 30 j + 18 k
c) (M+Q) x (M–Q) = 4 i + 4 j – 2 k

65- Siendo A = 3 i – j – 2 k y B = i – 3 k . Hallar el vector perpendicular a los vectores (2A + B) y (B – A)
Respuesta: 9 i + 21 j + 3 k

66- Los vectores **A,** **B** y **C**, satisfacen la condición: **A + B + C = 0;** demostrar que: **AxB = BxC =CxA**

67- Siendo los vectores: **A = (1; –1; 2);** **B = (3; 4; –2)** y **C = (–5; 1; –4),** demostrar que: **A.(BxC) = (AxB).C**

68- Determinar el vector unitario perpendicular a los vectores: **P = i + j** y **Q =** 2 **i – j** + 3 **k**.
Respuesta: $A_u = \dfrac{A}{|A|} = \dfrac{i + j + k}{\sqrt{3}}$

69- Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores: **A** = 3 **i + j** + 2 **k** y **B** = 4 **i – j**.
Respuesta: $\sqrt{117}$

70- Calcular el área del paralelogramo cuyos lados están determinados por los vectores 2**U** y **–V;** siendo: **U = (2; –1; 0) y V = (1; –3; 2)**

Respuesta: $6\sqrt{5}$

71- Calcular el área del triángulo de vértices: a) M(1; 0; 1); P(4; 2; 1); Q(1; 2; 0) y b) M(–1; 2;–2); P(2; 3;–1); Q(0;1;1)
Respuesta: a) $\frac{7}{2}$; b) $2\sqrt{6}$

72- Calcular el área del paralelogramo que tiene un vértice en A(3; 2; 1) y una de sus diagonales tiene como extremos los puntos B(1; 1; –1) y C(0; 1; 2)
Respuesta: $\sqrt{74}$

73- Se dan los vértices de un triángulo: A(1; –1; 2); B(5; –6; 2) y C(1; 3; –1). Calcular la longitud de su altura, bajada desde el vértice B al lado AC.
Respuesta: 5

74- Determinar un vector **V** perpendicular al eje OY y que cumpla la relación: **U = VxW** ; siendo: **U = (**1; 1; –1**)** y **W = (**2; –1; 1**)**
Respuesta: V = i + k

75- Dados los vectores **U = (**0; 1; –1**)** **;** **V = (**2; –2; –2**)** y **W = (**1; –1; 2**)**, determinar un vector **X** paralelo al vector **W** y que cumpla: **XxU =V**
Respuesta: X = – 2i + 2j – 4k

76- La fuerza **P =** 2 **i** – 4 **j** + 5 **k** está aplicada al punto M(4; –2; 3). Determinar el momento estático de esta fuerza con respecto al punto A(3; 2; –1)
Respuesta: $-4i + 3j + 4k$

77- Sabiendo que la fuerza **Q** = 3 **i** + 4 **j** – 2 **k** está aplicada a un cuerpo en el punto C(2; –1; –2), determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de esta fuerza con respecto al origen de coordenadas.
Respuesta: 15**;** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{2}{15}$; $\cos\gamma = \frac{11}{15}$

78- La fuerza **P =** 2 **i** + 2 **j** + 9 **k**, está aplicada al punto A(4; 2; –3). Determinar la magnitud y los ángulos directores del momento de esta fuerza con relación al punto C(2; 4; 0)
Respuesta: 28**;** $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$; $\cos\beta = -\frac{6}{7}$; $\cos\gamma = \frac{2}{7}$; α = 115° 22’ 37’’; β = 148° 59’ 50’’ ;
γ = 73° 23’ 54’’

79- El vector **X** es perpendicular a los vectores: **A = (**4**;** –2**;** –3**)** y **B = (**0**;** 1**;** 3**)** y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar **X** si: $|X| = 26$.
Respuesta: X = – 6i – 24j + 8k

RECTAS EN EL PLANO

80- Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto A(3; –2) y tenga la dirección del vector: **M = i** –2 **j = (**1**;** –2**)**

Respuesta: a) ecuación vectorial: (x; y) = (3; –2) +k (1; –2)

b) ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 - 2k \end{cases}$

c) ecuación simétrica: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = k$

d) ecuación general : –2x –y + 4 = 0

81- Una recta pasa por el punto P(–1; 3). Determinar:

a) su ecuación vectorial y simétrica, si es paralela a M = (2; –5)

b) su ecuación simétrica y general, si también pasa por A(–2; 2)

c) su ecuación general, si es paralela al segmento A(0; –1); B(1; 3)

Respuesta: a) A = P + k M ..... ecuación vectorial de la recta

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5} = k$ ecuación simétrica

b) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-1} = k$ ecuación simétrica

x + 1 = y – 3 ...... x – y + 4 = 0 ecuación general

c) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{4} = k$ ecuación simétrica

4x – y + 7 = 0 ecuación general

82- Una recta pasa por los puntos M y N. Determinar sus ecuaciones paramétricas y simétricas:
a) M(–4; 1) ; N(3; –5); b) M(7; 0); N(0; 4); c) M(5; –3); N(5; 2)

a) $\left.\begin{array}{l} x = -4 + 7k \\ y = 1 - 6k \end{array}\right\}$ ecuaciones paramétricas

$\frac{x+4}{7} = \frac{y-1}{-6} = k$ ecuación simétrica

b) $\left.\begin{array}{l} x = 7 - 7k \\ y = 4k \end{array}\right\}$ ecuaciones paramétricas

$\frac{x-7}{-7} = \frac{y}{4} = k$ ecuación simétrica

c) $\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = -3+5k \end{array}\right\}$ ecuaciones paramétricas

83-Hallar la ecuación de la recta que pase por los puntos P(–1; 3) y Q(2; –1)

Respuesta: ecuación vectorial: M = P + k PQ

ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + k\,(2 + 1) \\ y = 3 + k\,(-1 - 3) \end{cases}$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

ecuación simétrica: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4}$

84- Hallar las pendientes de las rectas determinadas por los puntos:
a) P(–3; 2) y Q(–2; 3); b) P(6; 1) y Q(–1; –3); c) P(0; –2) y Q(2; 0)
Respuesta: a) m= 1; b) m = $\frac{4}{7}$; c) m = 1

85- Hallar la ecuación de la recta que pase por A(5; 1) y sea paralela a la recta que pasa por: P(–3; 2) y Q(0; 5)
Respuesta: y – 1 = 1 (x – 5) (ecuación punto pendiente)
x – y – 4 = 0 (ecuación general)

86- Dados dos puntos P(2; 3) y Q(–1; 0), hallar la ecuación de la recta que pase por Q y sea perpendicular al segmento PQ.
Respuesta: x + y + 1 = 0

87- Hallar la ecuación de la recta, si el punto P(2; 3) es la base de la perpendicular bajada desde el origen de coordenadas a esta recta.
Respuesta: 2x + 3y –13 = 0

88- Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(x_1; y_1)$ y es paralela a la recta de ecuación A x + B y + C = 0 , puede escribirse de la forma: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$.

89- Demostrar que la condición de perpendicularidad de dos rectas: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$; se puede expresar de la forma: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

90- Determinar si los puntos A(2; 3) ; B(1; –1) y C(4; 1) están en la recta: 2x – 3y – 5 = 0.
Respuesta: A no está en la recta; B y C si están.

91- Determinar los puntos de intersección de la recta: x – 3y + 6 = 0 con los ejes coordenados.
Respuesta: A (–6; 0) y B (0; 2)

92- Dada la ecuación de la recta: 3x – 5y + 10 = 0 ; determinar su pendiente y su ordenada al origen.
Respuesta: m = $\frac{3}{5}$; b = 2

93- Determinar “a” para que la recta: $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$,
a) sea paralela al eje de abscisas
b) sea paralela al eje de ordenadas
c) pase por el origen de coordenadas

Respuesta: a) a = – 2 **;** b) a = ± 3 **;** c) $a_1 = 5/3$; $a_2 = 1$

94- Dados los vértices de un triángulo, encontrar las ecuaciones de las medianas: A(–5; 6) ; B(–1; –4) ; C(3; 2)
Respuesta: mediana relativa al vértice “A”: 7 x + 6 y – 1 = 0

mediana relativa al vértice "B": $x = -1$
mediana relativa al vértice "C": $x - 6y + 9 = 0$

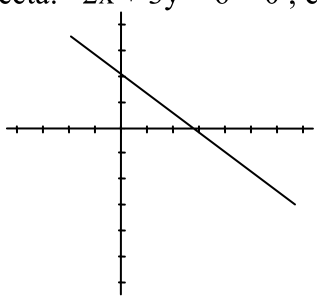
95- Determinar las pendientes y las ordenadas a origen en cada una de las rectas: a) $5x - y + 3 = 0$; b) $5x + 3y + 2 = 0$ y c) $y - 3 = 0$.
Respuesta: a) $m = 5$; $b = 3$; b) $m = -5/3$; $b = -\frac{2}{3}$; c) $m = 0$; $b = 3$

96- Se da la ecuación de la recta: $5x + 3y - 3 = 0$; determinar la pendiente: a) de la recta paralela a la dada y b) de la recta perpendicular a la dada.
Respuesta: a) $m_1 = -\frac{5}{3}$; b) $m_1 = \frac{3}{5}$

97- Teniendo la recta: $2x + 3y + 4 = 0$, hallar la ecuación de la recta que pase por el punto A(2; 1) y: a) que sea paralela a la recta dada y b) que sea perpendicular a la dada.
Respuesta: a) $2x + 3y - 7 = 0$ b) $3x - 2y - 4 = 0$

98- Determinar para que valor de "m" y "n", la recta: $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ es paralela al eje de abscisas y su ordenada a origen es igual a -3.
Respuesta: $m = 7$ y $n = -2$

99- Dada la ecuación de la recta: $2x + 3y - 6 = 0$; escribir su ecuación segmentaria y graficar.
Respuesta: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$



100-Calcular el área del triángulo que forma la recta: $4x - 5y + 20 = 0$ con los ejes coordenados.
Respuesta: 10

101-Calcular el área del triángulo que forma la recta: $3x - 4y - 12 = 0$ con los ejes coordenados.
Respuesta: 6

102- Determinar la ecuación de la recta que pase por el punto P(2, 3) y que la abscisa a origen sea el doble que su ordenada a origen
Respuesta: $x + 2y - 8 = 0$

103-Determinar el valor de "k" en la ecuación $2x + 3y + k = 0$, de modo que esta recta forme con los ejes coordenados un triángulo de 27 unidades de área.
Respuesta: $k = \pm 18$

104-Determinar el valor de "k" en la ecuación $3x - ky - 8 = 0$, de modo que esta recta forme con la recta $2x + 5y - 17 = 0$ un ángulo de 45°.

Respuesta: k = $-\dfrac{9}{7}$

105-Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasen por A(1; –6) y que el producto de sus coordenadas a origen sea igual a 1.
Respuesta: $4x + y + 2 = 0$ y $9x + y - 3 = 0$

106-Determinar para qué valores de “a” y “b”, las dos rectas: $ax - 2y - 1 = 0$ y $6x - 4y - b = 0$ a) tienen un punto común; b) son paralelas y c) coinciden.
Respuesta: a) $a \neq 3$; b cualquier valor
b) $a = 3$; $b \neq 2$
c) $a = 3$; $b = 2$

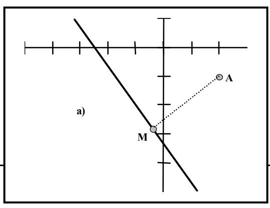
107-Determinar para que valor de “m” las dos rectas $(m-1)x + my - 5 = 0$ y $mx + (2m-1)y + 7 = 0$ se cortan en el eje de abscisas.
Respuesta: m = $\dfrac{7}{12}$

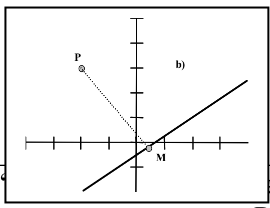
108-El triángulo ABC está dado por las ecuaciones de sus rectas: $4x - y - 7 = 0$; $x + 3y - 31 = 0$ y $x + 5y - 7 = 0$. Hallar sus vértices.
Respuesta: A(4; 9); B(2; 1); C(–53; 12)

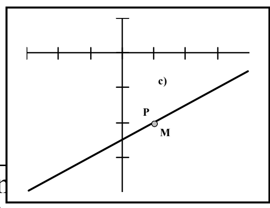
109-Determinar cuales de las ecuaciones siguientes son ecuaciones normales: a) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 3 = 0$; b) $\dfrac{2}{5}x - \dfrac{3}{5}y - 1 = 0$ y c) $\dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + 2 = 0$
Repuesta: a) es una ecuación normal; b) no es una ecuación normal; c) es una ecuación normal

110-Dadas las ecuaciones generales de las rectas, determinar en cada caso, la distancia “d” entre el origen de coordenadas y la recta; el ángulo “α” que forma esta distancia con el eje positivo de abscisas:
a) $x - 2 = 0$; b) $x + 2 = 0$; c) $y - 3 = 0$; d) $y + 3 = 0$; e) $\sqrt{3}\,x + y - 6 = 0$; f) $x - y + 2 = 0$; g) $x + \sqrt{3}\,y + 2 = 0$.
Respuesta: a) $d = 2$; α = 0°; b) $d = 2$; α = 180°; c) $d = 3$; α = 90°; d) $d = 3$; α = –90°
e) $d = 3$; α = 30°; f) $d = \sqrt{2}$; α = 135°; g) $d = 1$; α = 240°

111-Calcular la distancia entre los puntos y las rectas:
a) A(2;–1); 4x+3y+10=0; b) P(–2;3); 3x–4y–2=0; c) Q(1;–2); x–2y–5=0
Respuesta: a) 3 ; b) 4; c) 0







112-Determinar si las rectas dadas son paralelas y en caso afirmativo hallar su distancia: $3x + 5y - 4 = 0$; $6x + 10y + 7 = 0$.

Respuesta: si son paralelas; $d = \frac{15}{\sqrt{136}}$

SISTEMAS DE COORDENADAS

113-El origen de coordenadas se ha trasladado (sin cambiar la dirección de los ejes), al punto O'(–3; 5). Los puntos: A(–1; 3) ; B(3; –2) y C(0; –4) están referidos al nuevo sistema de coordenadas (X'O'Y') Calcular las coordenadas de estos puntos en el sistema XOY .
Respuesta: A(–4; 8) sistema XOY; B(0; 3) sistema XOY; C(–3; 1) sistema XOY

114-Los puntos A(1; –3) ; B(2; –5) y C(–2; –1) están referidos a un sistema de coordenadas que se ha trasladado paralelamente al punto B. Hallar las coordenadas de los puntos en el nuevo sistema.
Respuesta: A(–1; 2) sistema X'O'Y'; B(0; 0) sistema X'O'Y'; C(–4; 4) sistema X'O'Y'

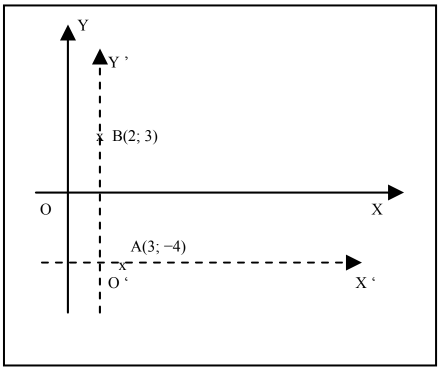
115-Escribir las fórmulas de trasformación de las coordenadas sabiendo que el punto P(–2; 3) referido al sistema XOY (primitivo), toma por coordenadas P(3; –2) en el nuevo sistema.
Respuesta: x = x' – 5
y = y' + 5

116-Determinar las coordenadas del origen O' del nuevo sistema, si las fórmulas de transformación de coordenadas están dadas mediante las siguientes relaciones:
a) x = x'– 3; y = y'– 5; b) x = x+ 2; y = y'–1; c) x = x'; y = y'+ 1; d) x = x'+ 5; y = y'.
Respuesta: a) $O'(-3;-5)$; b) $O'(2;-1)$; c) $O'(0;-1)$; d) $O'(5;0)$

117-La ecuación de la recta: 3 x + 2 y – 6 = 0 , está referida a un sistema de coordenadas XOY. Escribir su ecuación en un sistema X'O'Y' de forma tal que la misma pase por el origen de coordenadas.
Respuesta: 3 x' + 2 y' = 0

118-Los puntos: A(3; −4) y B(2; 3) están referidos al sistema de coordenadas XOY. Determinar las coordenadas del nuevo origen O' sabiendo que en este sistema trasladado, el punto A se sitúa en el eje de abscisas y el punto B en el eje de ordenadas.

Respuesta: O'(2; −3)



CIRCUNFERENCIA

119-Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C(5; − 2) y radio r = 5.
Respuesta: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$

120-Una circunferencia que tiene centro en el origen, pasa por el punto M(6; − 8). Hallar su ecuación.
Respuesta: $x^2 + y^2 = 100$

121-Una circunferencia pasa por el origen de coordenadas y tiene centro en C(3; –4). Hallar su ecuación.
Respuesta: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$; o su ecuación general: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

122-Una circunferencia tiene centro en C(− 4; 3) y es tangente al eje OY (de ordenadas). Hallar su ecuación.
Respuesta: $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$

123-Los puntos A(3; 2) y B(−1; 6)son puntos extremos del diámetro de una circunferencia. Determinar su ecuación.
Respuesta: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$ ó $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$

124-En cada una de las ecuaciones siguientes, indicar cual de ellas determina una circunferencia. Hallar el centro y el radio
a) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$; b) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$; c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$; d) $x^2 + y^2 + x = 0$
e) $x^2 + y^2 + y = 0$
Respuesta: a) C(−2, 0); r = 8;
b) C(0, 5); r = $\sqrt{5}$
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -9$... esta ecuación corresponde a una cia. con radio imaginario
d) C(−1/2; 0); r = $\frac{1}{2}$
e) C(0; −1/2) ; r = $\frac{1}{2}$

125-Verificar si el punto A(1; –2) está dentro, fuera ó en las circunferencias dadas: a) $x^2 + y^2 = 1$; b) $x^2 + y^2 = 5$; c) $x^2 + y^2 = 9$; d) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$; e) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.
Respuesta: a) el punto se encuentra en el exterior de la circunferencia
b) el punto se encuentra en la circunferencia
c) el punto se encuentra en el interior de la circunferencia
d) el punto se encuentra en la circunferencia
e) el punto se encuentra en el interior de la circunferencia

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

126-Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en C(–2; 3) y es tangente a la recta: $20\,x - 21\,y - 42 = 0$

Respuesta: la ecuación canónica es: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

la ecuación general $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

127-Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de abscisas y pasa por los puntos P(–3; 2) y Q(4; 5)

Respuesta: $x^2 + y^2 - 4\,x - 25 = 0$

128- Determinar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A(1, –4) y B(5, 2) y su centro esté en la recta: $x - 2\,y + 9 = 0$

Respuesta: $x^2 + y^2 + 6\,x - 6\,y - 47 = 0$

129-Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos: A(1; 1) ; B(1; -1) y C(2; 0)

Respuesta: $x^2 + y^2 - 2\,x = 0$

130-Determinar el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2\,x + 20\,y - 20 = 0$

Respuesta: $h = 1$; $k = -10$; $r = 11$

131-Determinar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2\,x + 20\,y - 20 = 0$

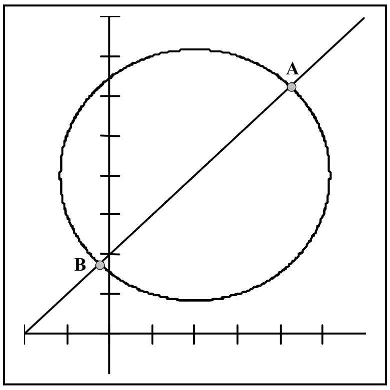
Respuesta: C(1; –10); r = 11

132-Hallar los puntos de intersección de las curvas: $x^2 + y^2 - 4\,x - 8\,y + 10 = 0$; $x - y + 2 = 0$

Respuesta:

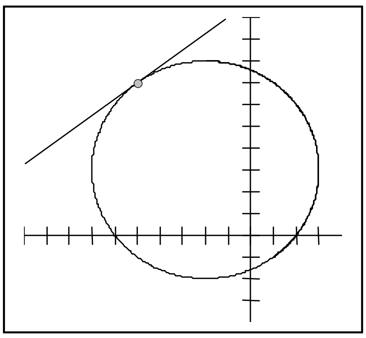
$\mathbf{x_1 = 2 +} \sqrt{5}$ **;** $\mathbf{x_2 = 2} - \sqrt{5}$

$\mathbf{y_1 = 4 +} \sqrt{5}$ **;** $\mathbf{y_2 = 4} - \sqrt{5}$



133-Hallar los puntos de intersección de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 4\,x - 6\,y - 12 = 0$ y la recta: $3\,x - 4\,y + 43 = 0$

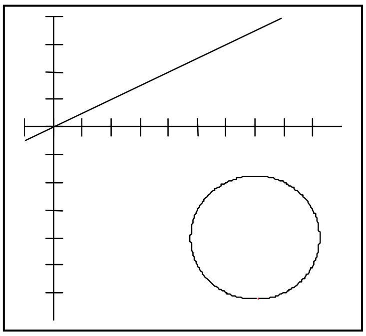
Respuesta: $x_1=x_2= -5$; $y_1=y_2=7$



EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

134-Hallar los puntos de intersección de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 14\,x + 8\,y + 60 = 0$ y la recta: $x - 2\ y = 0$

Respuesta: $\mathbf{x_{1,2}} = 4 \pm 2\sqrt{5}\ i$; $\mathbf{y_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{5}\ i$



135-Dadas las ecuaciones de las circunferencias: $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 3 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - y - 3 = 0$, hallar sus puntos de intercepción.

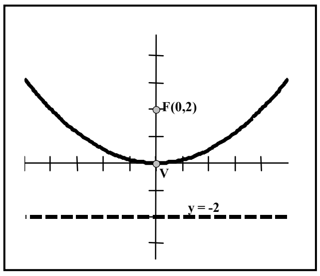
Respuesta: M(1; 1); N(−3/2; −3/2)

PARÁBOLA

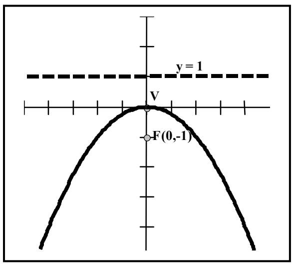
136-Encontrar la ecuación de cada una de las parábolas sabiendo que: a) vértice en V(0; 0); y directriz: $y = -2$; b) foco en F(0; – 1) y directriz: $y - 1 = 0$; c) vértice en V(0; 0) y foco en F(0; –2); d) foco en F(–1/2; 0) y directriz: $2\,x = 1$

Respuestas:

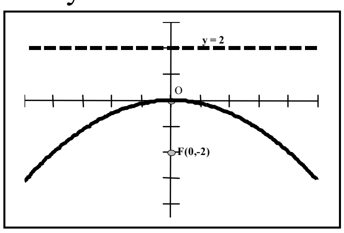
a) $x^2 = 8\,y$



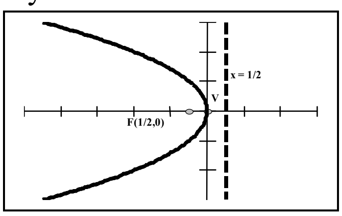
b) $x^2 = -4\,y$



c) $x^2 = -8\,y$

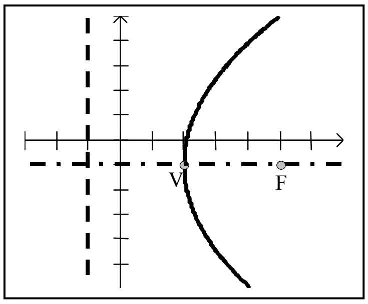


d) $y^2 = -2\,x$



EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

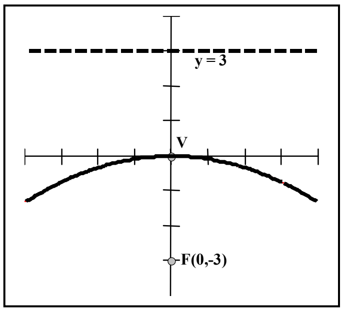
137-Hallar la ecuación de la parábola conociendo el vértice V(2; –1) ; foco F(5; –1)
Respuesta: $(y + 1)^2 = 12\ (x – 2)$ ecuación canónica
$y^2 – 12\ x + 2\ y + 25 = 0$ ecuación general



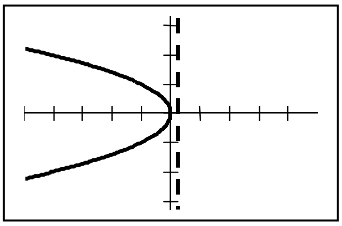
138-Hallar la ecuación de la parábola si el vértice está en V(0; 0) ;su eje tiene por ecuación: $y = 0$; y pasa por P(4; 5)
Respuesta: $4\ y^2 – 25\ x = 0$

139-Dadas las ecuaciones de las parábolas, determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz: a) $x^2 = – 12\ y$; b) $y^2 = 3\ x$; c) $y^2 + x = 0$ y d) $x^2 – 4\ y = 0$.
Respuesta:

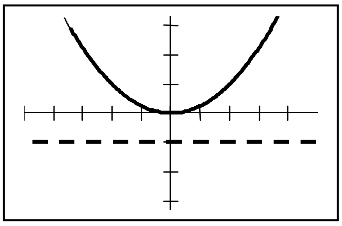
a) F(0; –3)
$y = 3$



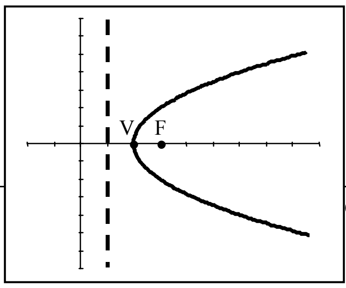
b) F(3/4; 0)
$x = –3/4$



c) F(–1/4; 0)
$x = 1/4$



d) F(0; 1)
$y = – 1$

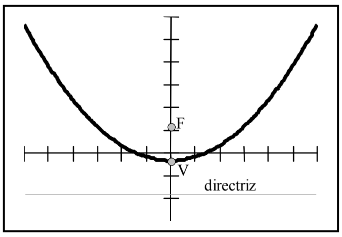


EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

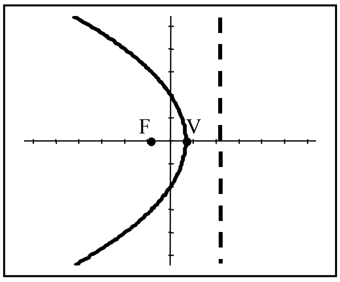
140-En cada una de las ecuaciones siguientes, determinar las coordenadas del vértice y del foco y la ecuación de la directriz:

Respuestas:

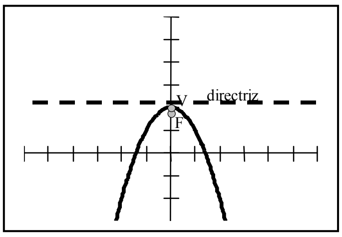
a) $y^2 = 4x - 8$;
$V(2; 0)$;
$F(3; 0)$;
$x = 1$



b) $x^2 = 6y + 2$;
$V(0; -1/3)$
$F(0; 7/6)$
$y = -\dfrac{11}{6}$



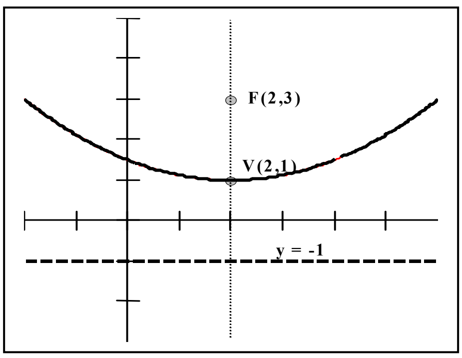
c) $y^2 = 4 - 6x$;
$V(2/3; 0)$;
$F(-5/6; 0)$;
$x = \dfrac{13}{6}$



d) $x^2 = 2 - y$;
$V(0; 2)$;
$F(0; 7/4)$;
$y = 9/4$

141-Hallar la ecuación de la parábola con foco en $F(2; 3)$ y directriz: $y = -1$

Respuesta: $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$



142-Sabiendo que una parábola tiene foco en $F(6; 4)$; y directriz: $y = -2$, determinar su ecuación
Respuesta: $(x - 6)^2 = 12\ (y - 1)$:ecuación canónica;
$x^2 - 12\ x - 12\ y + 48 = 0$: ecuación general

143-Una parábola tiene su eje paralelo al eje de ordenadas y pasa por $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(2; 0)$. Encontrar su ecuación.
Respuesta: $x^2 - 3\ x - 2\ y + 2 = 0$

144- Determinar la ecuación de la parábola con vértice en $V(1; 3)$, eje paralelo al eje OX, y pasa por $P(-1; -1)$.
Respuesta: $y^2 + 8\ x - 6\ y + 1 = 0$: ecuación general

145-Dada las ecuaciones de las parábolas, en cada caso determinar: las coordenadas del foco y del vértice y la ecuación de la directriz .
a) $y^2 + 2\ y - 16\ x - 31 = 0$; b) $x^2 - 4\ x + y = 0$; c) $y^2 + 4\ y + 16\ x - 44 = 0$;
d) $x^2 - 8\ x - 6\ y + 14 = 0$
Respuesta: a) $F(2; -1)$; $x = -6$; b) $F(2; 15/4)$; $y = 17/4$; c) $F(-1; -2)$; $x = 7$;
d) $F(4; 7/6)$; $y = -11/6$

146-Hallar la intersección de la recta: $x + y - 3 = 0$ y la parábola: $x^2 = 4\ y$
Respuesta: $\begin{cases} a_1 = 2; & b_1 = 1 \\ a_2 = -6\ ; & b_2 = 9 \end{cases}$

147-Determinar los puntos de intersección entre la recta: $3\ x + 4\ y - 12 = 0$ y la parábola: $y^2 = -9\ x$.
Respuesta: $P_1(-4; 6)$ y $P_2(-4; 6)$

148-Determinar los puntos de intersección entre la recta: $3\ x - 2\ y + 6 = 0$ y la parábola: $y^2 = 6\ x$.
Respuesta: la recta no corta a la parábola

149-Deducir la condición según la cual, la recta: $y = m\ x + k$ sea tangente a la parábola: $y^2 = 2\ p\ x$.
Respuesta: $p = 2\ m\ k$

150-Determinar para cada ecuación si la recta: corta, es tangente ó no corta a la parábola:
a) $x - y + 2 = 0$; $y^2 = 8\ x$; b) $8\ x + 3\ y - 15 = 0$; $x^2 = -3\ y$; c) $5\ x - y - 15 = 0 y^2 = -5\ x$

Respuesta: a) $T(2; 4)$; b) la recta y la parábola se cortan en dos puntos: $T(5; -25/3)$ y $R(3; -3)$;
c) la recta y la parábola no se cortan.

151-Encontrar "m" para que la recta: $y = m\ x + 2$ y la parábola: $y^2 = 4\ x$: a) se corten; b) sean tangentes y c) no se corten.
Respuesta: a) $m = \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} > m$ y c) $\frac{1}{2} < m$

ELIPSE

152- En cada ecuación dada, determinar: las coordenadas de los focos y de los vértices; y hallar la longitud de la excentricidad y la cuerda focal mínima.

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; b) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$; c) $16\,x^2 + 25\,y^2 - 400 = 0$

Respuesta:

a) $F_1(8; 0)$, $F_2(-8; 0)$ $A_1(10; 0)$, $A_2(-10; 0)$; $e=\frac{8}{10}$; $C_{fm} = \frac{36}{5}$

b) $F_1(0; \sqrt{3})$, $F_2(0; -\sqrt{3})$ $A_1(0; 2)$, $A_2(0; -2)$; $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $C_{fm}=\frac{2b^2}{a}=\frac{2x1^2}{2}=\frac{2}{2}=1$

c) $F_1(3; 0)$, $F_2(-3; 0)$ $A_1(5; 0)$, $A_2(-5; 0)$; $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$; $C_{fm} = \frac{2b^2}{a}=\frac{2x4^2}{5}=\frac{32}{5}$

153- Las siguientes elipses tienen centro en el origen de coordenadas, determinar sus ecuaciones para las condiciones dadas:

a) un foco en F(3/4; 0) y un vértice en A(1; 0)
b) un foco en F(0; –2) y eje menor mide 4
c) focos en el eje OX, excentricidad e= 2/3 y pasa por P(2; –5/3)
d) focos en el eje OY, excentricidad e= 12/13 y la distancia focal es 8
e) focos en el eje OY, la distancia entre sus directrices es igual a 32/3 y la excentricidad e = ¾

Respuesta: a) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{7/16}=1$; b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$; c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; d) $\frac{x^2}{(5/3)^2}+\frac{y^2}{(13/3)^2}=1$;

e) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

154- Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas, focos sobre el eje de abscisas y las condiciones siguientes:

a. sus semiejes son iguales a 5 y 2
b. su eje mayor es igual a 10 y la distancia focal es 8
c. su eje menor es 24 y la distancia focal es 10
d. la distancia entre sus focas es 6 y la excentricidad es 3/5
e. su eje mayor es 20 y la excentricidad es 3/5
f. la distancia entre sus directrices es 5 y la distancia focal es 4
g. la distancia entre sus directrices es 32 y la excentricidad mide 1/2

Respuesta:

a) $4\,x^2 + 25\,y^2 - 100 = 0$
b) $9\,x^2 + 25\,y^2 - 225 = 0$
c) $144\,x^2 + 169\,y^2 - 24336 = 0$
d) $16\,x^2 + 25\,y^2 - 400 = 0$
e) $16\,x^2 + 25\,y^2 - 1600 = 0$
f) $x^2 + 5\,y^2 - 5 = 0$
g) $x^2 + 16\,y^2 - 64 = 0$

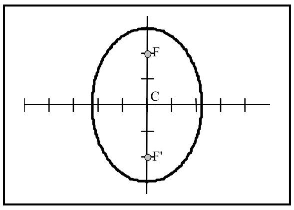
EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

155- Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas, focos sobre el eje de ordenadas y las condiciones siguientes:

a. sus semiejes son iguales a 7 y 2
b. su eje mayor es igual a 10 y la distancia focal es 8
c. su eje menor es 16 y la excentricidad es igual a 3/5
d. la distancia entre sus focos es 24 y la excentricidad es 12/13
e. la distancia entre sus directrices es 50/3 y la distancia focal es 6
f. la distancia entre sus directrices es 32/3 y la excentricidad mide ¾

Respuesta: a) $49\ x^2 + 4\ y^2 - 196 = 0$; b) $25\ x^2 + 9\ y^2 - 225 = 0$; c) $25\ x^2 + 16\ y^2 - 1600 = 0$
b) $169\ x^2 + 25\ y^2 - 4225 = 0$; e) $25\ x^2 + 16\ y^2 - 400 = 0$; f) $16\ x^2 + 7\ y^2 - 112 = 0$

156- Dada la elipse: $9\ x^2 + 5\ y^2 = 45$; determinar: a) sus ejes; b) sus focos; c) su excentricidad y d) ecuación de sus directrices.
Respuesta: : F(0; 2) ; F'(0; –2) ; e = 2/3 ; y = ± 9/2



157- Hallar la ecuación de la elipse cuyo eje mayor mide 2a = 10 y los focos están situados en $F_1(2; -1)$ y $F_2(2; 5)$
Respuesta: $25\ x^2 + 16\ y^2 - 100\ x - 64\ y - 236 = 0$ "ecuación general de la elipse"

158- Determinar la ecuación de la elipse con centro en C(2; 4), uno de sus focos está en F(5; 4) y su excentricidad es e = 3/4.
Respuesta: $7\ x^2 + 16\ y^2 - 28\ x - 128\ y + 172 = 0$ "ecuación general de la elipse"

159- Encontrar la ecuación de la elipse con vértices en $A_1(-1; 2)$ y $A_2(-7; 2)$ y su eje menor mide 2 unidades.
Respuesta: $x^2 + 9\ y^2 + 8\ x - 36\ y + 43 = 0$

160- Determinar la ecuación de la elipse con vértices en los puntos $A_1(1; -4)$; $A_2(1; 8)$ y su excentricidad es $e = \frac{2}{3}$.
Respuesta: $36\ x^2 + 20\ y^2 - 72\ x - 80\ y - 604 = 0$

161- Hallar la ecuación de la elipse sabiendo que:

a) su eje mayor es igual a 26 y los focos son $F_1(-10 ; 0)$ y $F_2(14; 0)$
b) su eje menor es igual a 2 y los focos son $F_1(-1; -1)$ y $F_2(-1; 1)$
c) sus focos están en $F_1(-2;\ 3/2)$ y $F_2(-2; -3/2)$ y la excentricidad $e = \sqrt{2}/2$

Respuesta: a) $25\ x^2 + 169\ y^2 - 100\ x - 4125 = 0$; b) $2\ x^2 + y^2 + 4\ x = 0$
c) $4\ x^2 + 2\ y^2 + 16\ x + 7 = 0$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

162- Hallar la ecuación de la elipse si su excentricidad $e = 1/2$, su foco $F(-4; 1)$ y la ecuación de la directriz correspondiente es $y + 3 = 0$
Respuesta: $4x^2 + 3y^2 + 32x - 14y + 59 = 0$

163- Dada la ecuación de elipse: $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$, determinar: a) centro; b) focos; c) vértices y d) excentricidad.
Respuesta: $C(-1; -2)$; $F(-1; -5)$; $F'(-1; 1)$; $A(-1; 3)$; $A'(-1; -7)$; $B(3; -2)$; $B'(-5; -2)$; $e = 3/5$

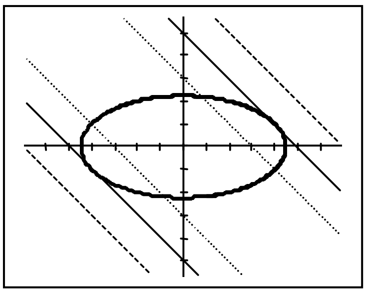
164- Dada la ecuación de elipse: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, determinar: a) centro; b) focos; c) vértices y d) excentricidad.
Respuesta: $C(1; 2)$; $F(1+\sqrt{5}; 2)$; $F'(1-\sqrt{5}; 2)$; $A(4; 2)$; $A'(-2; 2)$; $B(1; 4)$; $B'(1; 0)$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

165- Hallar los puntos de intersección de la recta y la elipse dadas sus ecuaciones: $x + 2y - 7 = 0$; $x^2 + 4y^2 = 25$.
Respuesta: $P_1(3; 2)$; $P_2(4; 3/2)$

166- Hallar los puntos de intersección de la recta y la elipse dadas sus ecuaciones $3x + 10y - 25 = 0$; $4x^2 + 25y^2 = 100$.
Respuesta: $P(3; 8/5)$

167- Hallar los puntos de intersección de la recta y la elipse dadas sus ecuaciones: $2x + y - 10 = 0$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y}{4} = 1$.
Respuesta: La recta no intercepta a la elipse

168- Determinar para que valores de "m", la recta: $x + y - m = 0$ y la elipse: $5x^2 + 20y^2 - 100 = 0$
a) se cortan; b) son tangentes; c) no se cortan
Respuesta: a) $-5 < m < 5$ b) $m = \pm 5$ c) $-5 > m > 5$



169- Deducir la condición según la cual la recta: $y = kx + m$, es tangente a la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Respuesta: $b^2 - m^2 + a^2k^2 = 0$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

HIPÉRBOLA

170- En cada ecuación dada, determinar: las coordenadas de los focos y de los vértices; la excentricidad y la cuerda focal mínima.

a) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$; b) $\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{64}=1$; c) $4x^2 - y^2 + 4 = 0$

Respuesta:

a) $F(2\sqrt{41}; 0)$, $F'(-2\sqrt{41}; 0)$ $A(10; 0)$, $A'(-10; 0)$; $e=\frac{\sqrt{41}}{5}$; Cfm= $\frac{64}{5}$

b) $F_1(0; 2\sqrt{41})$, $F_2(0; -2\sqrt{41})$ $A_1(0; 10)$, $A_2(0; -10)$; $e=\frac{\sqrt{41}}{5}$; Cfm $=\frac{64}{5}$

c) $F_1(0; \sqrt{5})$, $F_2(0; -\sqrt{5})$ $A_1(0; 2)$, $A_2(0; -2)$; $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$; Cfm = $\frac{2}{5}$

171- Las siguientes hipérbolas tienen centro en el origen de coordenadas, determinar sus ecuaciones para las condiciones dadas:

a) un foco en $F(5; 0)$ y un vértice en $A(3; 0)$
b) un foco en $F(0; 5)$ y eje no transverso mide 4
c) eje real sobre el eje OY, eje imaginario mide 8 y excentricidad $e = 5/3$
d) focos en $F(0; \pm 5)$ y eje imaginario igual a 4

Respuesta a) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{24}=1$; b) $\frac{y^2}{21}-\frac{x^2}{4}=1$; c) $\frac{2y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$; d) $\frac{y^2}{21}-\frac{x^2}{4}=1$

172- Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas, focos sobre el eje de abscisas y las condiciones siguientes:

a) sus semiejes son $a = 5$ y $b = 2$
b) su eje transverso es igual a 8 y la distancia focal es 10
c) su eje imaginario es 10 y la distancia focal es 24
d) la distancia entre sus focos es 6 y la excentricidad es 5/3
e) su eje real es 20 y la excentricidad es 2,5

Respuesta: a) $4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$; b) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$; c) $25x^2 - 119y^2 - 2975 = 0$
d) $3600x^2 - 2025y^2 - 11664 = 0$; e) $125x^2 - 100y^2 - 12500 = 0$

173- Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas, focos sobre el eje de ordenadas y las condiciones siguientes:

a) sus semiejes son $a = 2$ y $b = 6$
b) su eje real es igual a 10 y la distancia focal es 14
c) su eje imaginario es 16 y la excentricidad es igual a 5/3
d) la distancia entre sus focas es 24 y la excentricidad es 12/7

Respuesta: a) $36x^2 - 4y^2 - 144 = 0$; b) $24y^2 - 25x^2 - 600 = 0$; c) $64y^2 - 36x^2 - 2304 = 0$

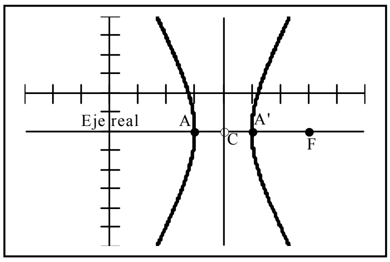
d) $95\ y^2 - 49\ x^2 - 4655 = 0$

174- Dada la hipérbola: $9\ x^2 - 5\ y^2 = 45$, determinar: a) sus ejes; b) sus focos; c) su excentricidad y d) la ecuación de sus asíntotas.

Respuesta: a) $a = \sqrt{5}$; $b = 3$; $c = \sqrt{13}$ b) $F(\pm\sqrt{13}\,;\,0)$ c) $e = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ d) $y = \pm\dfrac{3\sqrt{5}}{5}x$

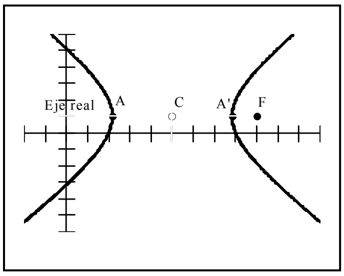
175- Determinar la ecuación de la hipérbola que tiene vértices en A(5,−2) y A'(3,−2) y uno de sus focos está en F(7, −2)

Respuesta: $8\ x^2 - y^2 - 64\ x - 4\ y + 116 = 0$



176- El centro de una hipérbola es el punto C(5; 1), uno de sus focos está en F(9; 1) y el eje imaginario mide $4\sqrt{2}$. Hallar su ecuación.

Respuesta: $x^2 - y^2 - 10\ x + 2\ y + 16 = 0$



177- Dada la ecuación de la hipérbola: $9\ y^2 - 25\ x^2 - 90\ y - 50\ x - 25 = 0$; encontrar su ecuación típica, luego hallar las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices, y el valor de la excentricidad.

Respuesta: $\dfrac{(y-5)^2}{25} - \dfrac{(x+1)^2}{9} = 1$ ecuación típica

C(−1; 5)

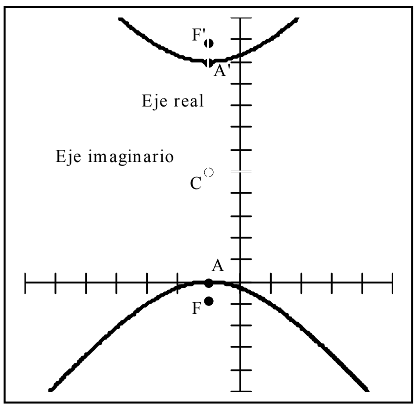
$a = 5$

$b = 3$

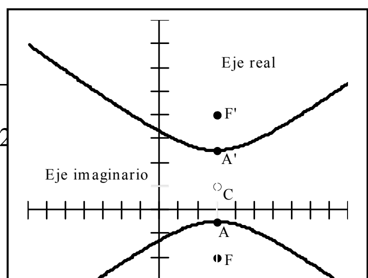
$F(-1;\ 5\pm\sqrt{34})$

$V(-1;\ 5\pm5)$

$e = \sqrt{34}/5$



178- Determinar la ecuación de la hipérbola con focos en los puntos F(3; 4) ; F'(3;–2) y su excentricidad es e = 2.



EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

Respuesta: $12y^2 - 4x^2 - 24y + 24x - 51 = 0$

179- Hallar los puntos de intersección de la recta y la hipérbola dadas sus ecuaciones:
$x - y - 3 = 0$; $3x^2 - 12y^2 - 36 = 0$.
Respuesta: P(4; 1)

180- Hallar los puntos de intersección de la recta y la hipérbola dadas sus ecuaciones:
$2x - y - 10 = 0$; $5x^2 - 20y^2 = 100$.
Respuesta: $P_1(6; 2)$ y $P_2(14/3; -2/3)$

181- Hallar los puntos de intersección de la recta y la hipérbola dadas sus ecuaciones:
$7x - 5y = 0$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y}{16} = 1$
Respuesta: La recta no intercepta a la hipérbola

182- Hallar la ecuación de la hipérbola sabiendo que:
a) su eje real es igual a 16 y los focos son $F_1(-10 ; 0)$ y $F_2(14; 0)$
b) su eje imaginario es igual a 2 y los focos son $F_1(-1; -1)$ y $F_2(-1; 9)$
c) sus focos están en $F_1(-4 ; -3)$ y $F_2(8; -3)$ y la excentricidad $e = \sqrt{2}$
Respuesta:
a) $\frac{(x-2)^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1$ ecuación canónica
$5x^2 - 4y^2 - 20x - 300 = 0$ ecuación general

b) $\frac{(y-4)^2}{24} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$ ecuación canónica
$24x^2 - y^2 + 48x + 8y + 32 = 0$ ecuación general

c) $\frac{(x-2)^2}{18} - \frac{(y+3)^2}{18} = 1$ ecuación canónica

$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$ ecuación general

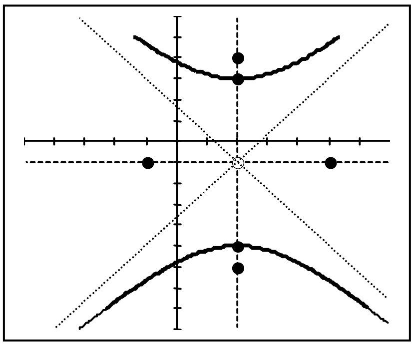
183- Hallar la ecuación de la hipérbola si su excentricidad $e = \sqrt{5}$, su foco F(2; –3) y la ecuación de la directriz correspondiente es: $y = 3x + 3$
Respuesta: $35x^2 - 30xy - 5y^2 - 130x - 90y - 85 = 0$

184- Dada la ecuación $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$, determinar: a) centro; b) focos; c) vértices; d) excentricidad y e) ecuación de las asíntotas.
Respuesta: C(2; –3) ;a = 3 ; b = 4 ; c = 5; F(2±5; –3); A(2±3;–3); B(2;–3±4); e = c/a = 5/3;
$y + 3 = \pm 4/3(x - 2)$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

185- Dada la ecuación $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$, determinar: a) centro; b) focos; c) vértices; d) excentricidad e) ecuación de las asíntotas
Respuesta: C(−5; 1; a = 8 ; b = 6; c = 10; F(−5±10; 1); A(−5±8; 1) ;B(−5; 1±6); e = c/a = 10/8;
y - 1 = ±3/4(x + 5)

186- Dada la ecuación $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$, determinar: a) centro; b) focos; c) vértices; d) excentricidad e) ecuación de las asíntotas
Respuesta: C(2; −1); a = 4 ; b = 3; c = 5; F(2; −1±5); A(2; −1±4); B(2±3; −1); e = c/a = 5/4; y + 1 = ±4/3(x – 2)



187- Determinar para qué valores de “m” la recta $5x - 2y + 2m = 0$ y la hipérbola $4x^2 - y^2 - 36 = 0$ a) se cortan; b) son tangentes; c) no se cortan.

Respuesta: a) $-\frac{9}{2} > m > \frac{9}{2}$; b) $m = \pm\frac{9}{2}$; c) $-\frac{9}{2} < m < \frac{9}{2}$

188- Deducir la condición según la cual la recta: $y = kx + m$, es tangente a la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Respuesta: $b^2 + m^2 - a^2k^2 = 0$

LÍMITES

189. Determinar el valor de los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x\to 2} x^3$ R: 8

b) $\lim_{x\to 100} \log_{10} x$ R: 2

c) $\lim_{x\to \pi} \cos x$ R: −1

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2+2x+1}$ R: 1

e) $\lim_{x\to -1} |x|$ R: 1

f) $\lim_{x\to 0} 2^x$ R: 1

g) $\lim_{x\to 2} (x^3+x^2+2x-1)$ R: 15

h) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x$ R: -1

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ R: 0

j) $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x}$ R: 3

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x}$ R: 0

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ R: -1

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ R: 6

n) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ R: 0

o) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ R: 12

p) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ R: 3

q) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5}$ R: 3

r) $\lim\limits_{x \to -4} (\sqrt{-x} - x + 2)$ R: 8

190. Las funciones siguientes son continuas en sus dominios. Determinar sus límites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2x + \cos x)$ R: π

b) $\lim\limits_{x \to -2} (|x| - 3^x)$ R: 17/9

c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 + x + 7}$ R: 3

d) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} + 2^2 \right)$ R: 17

e) $\lim\limits_{x \to 4} (2^x . \log_2 x)$ R:32

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\log_2 (\operatorname{sen} x)]$ R: 0

g) $\lim\limits_{x \to 2} 2^{x^2 - x}$ R: 14

h) $\lim\limits_{x \to 4} \operatorname{sen} (\sqrt{x} - \log_2 x)$ R: 0

191. Determinar los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$ R: 1/3

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } 4x}{2x}$ R: 2

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg } x}{x}$ R: 1

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{sen }(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$ R: 1

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{sen } x}{x}$ R: $\dfrac{2}{\pi}$

f) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\text{sen }(x-\pi)}{x-\pi}$ R: 1

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{3.\text{sen }(x-\frac{\pi}{2})}{6x-3\pi}$ R: 1/2

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)}{x^2}$ R: −1/2

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg } x-\text{sen } x}{1-\cos x}$ R: 0

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\text{sen } x}{x-\text{sen } x}$ R: no existe

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x}$ R: 3/5

l) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x+2}{2x^2-x+1}$ R: 3/2

m) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+1}{x^5-1}$ R: 1

n) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+3x-2}$ R: ∞

o) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{3x^3+2x^2-x+2}$ R: 1/3

p) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$ R: ∞

q) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+3}{5x^5+x^2+1}$ R: 0

r) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5}{x^2+4}$ R: 0

DERIVADAS

192. Algebraicas:

$y' = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ R: $y' = 5x^4 - 12x2 + 2$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$y = a\,x^2 + b\,x + c$ R: $y' = 2\,a\,x + b$

$y = a\,t^m + b\,t^{m+n}$ R : $y' = m\,t^{m-1} + (m+n).b\,t^{m+n-1}$

y = $\dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ R: y' = $\dfrac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

y = $\dfrac{\pi}{x} + \ln 2$ R: y' = $-\dfrac{\pi}{x^2}$

y = $x^2\sqrt[3]{x^2}$ R: y' = $\dfrac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$

193. Trigonométricas y Transcendentes

y = $5\,sen\,x + 3\cos x$ R: $y' = 5\cos x - 3\,sen\,x$

y = $\dfrac{senx + cosx}{senx - cosx}$ R: y' = $\dfrac{-2}{(senx - cosx)^2}$

y = $2\,t\,sen\,t - (t^2 - 2)\cos t$ R : $y' = t^2\,sen\,t$

y = $x^7\,e^x$ R : $y' = x^6\,e^x\,(x+7)$

y = $(x-1)\,e^x$ R : $y' = x\,e^x$

y = $\dfrac{e^x}{x^2}$ R : y' = $e^x\,\dfrac{x-2}{x^3}$

y = $\dfrac{x^5}{e^x}$ R : y' = $\dfrac{5x^4 - x^5}{e^x}$

y = $e^x\cos x$ R : $y' = e^x\,(\cos x - sen\,x)$

194. Logarítmicas

y = $x^{\sqrt{x}}$ R: y' = $x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)$

y = $e^{sen\,x^2}$ R: y' = $2\,x\cos x^2 \,.\, e^{sen\,x^2}$

y = $\sqrt[x]{x}$ R: y' = $\sqrt[x]{x}\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$

y = $e^{\cos x^2}$ R: y' = $-2\,x\,sen\,x^2 \,.\, e^{\cos x^2}$

y = $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ R: y' = $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

y = $e^{sen^2 x}$ R: y' = $2\,sen\,x\,.\cos x \,.\, e^{sen^2 x}$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$y = (\text{sen x})^{x}$ R: $y' = (\text{sen x})^{x}\left(\ln(\text{sen x}) + \dfrac{\text{x.cos x}}{\text{sen x}}\right)$

$y = (\cos x)^{x}$ R: $y' = (\cos x)^{x}\left(\ln(\cos x) - \dfrac{\text{x.sen x}}{\cos x}\right)$

$y = 3^{sen\,x}$ R: $y' = 3^{sen\,x}.\ln 3.\cos x$

$y = x^{\text{sen x}}$ R: $y' = x^{\text{sen x}}\left(\cos x.\ln x + \dfrac{\text{sen x}}{x}\right)$

$y = 3^{\cos x}$ R: $y' = -3^{\cos x}.\ln 3.sen\,x$

$y = x^{\cos x}$ R: $y' = x^{\cos x}\left(\text{sen x}.\ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$

$y = 2^{sen\,x^2}$ R: $y' = 2^{sen\,x^2}.2x.\ln 2.\cos x^{2}$

$y = (\cos x)^{\text{sen x}}$ R: $y' = (\cos x)^{\text{sen x}}\left(\cos x.\ln(\cos x) - \dfrac{\text{sen x}^{2}}{\cos x}\right)$

$y = e^{\sqrt{sen\,x}}$ R: $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen x}}}.e^{\sqrt{sen\,x}}$

$y = (\ln x)^{x}$ R: $y' = (\ln x)^{x}\left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}\right)$

$y = 2^{\cos x^2}$ R: $y' = -2^{\cos x^2}.2x.\ln 2.\text{sen x}^{2}$

$y = x^{\ln x}$ R: $y' = x^{\ln x}.\dfrac{2\ln x}{x}$

$y = 4^{sen^2 x}$ R: $y' = 4^{sen^2 x}.2\,\text{sen x}.\cos x.\ln 4$

$y = (\text{sen x})^{\text{sen x}}$ R: $y' = (\text{sen x})^{\text{sen x}}(\cos x.\ln(\text{sen x}) + \cos x)$

$y = 4^{\cos^2 x}$ R: $y' = 4^{\cos^2 x}.2\cos x.\text{sen x}.\ln 4$

$y = (\text{sen x})^{\cos x}$ R: $y' = (\text{sen x})^{\cos x}\left(-\text{sen x}.\ln(\text{sen x}) + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen x}}\right)$

$y = e^{\sqrt{x}}$ R: $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

$y = (\cos x)^{\cos x}$ R: $y' = (\cos x)^{\cos x}(-\text{sen x}.\ln(\cos x) - \text{sen x})$

$y = e^{\sqrt{\cos x}}$ R: $y' = -\dfrac{\text{sen x}.e^{\sqrt{\cos x}}}{2\sqrt{\cos x}}$

$y = (\text{sen x})^{\ln x}$ R: $y' = (\text{sen x})^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(\text{sen x})}{x} + \dfrac{\cos x.\ln x}{sen\,x}\right)$

$y = e^{Ln\,x}$ R: $y' = 1$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$y = (\cos x)^{\ln x}$ R: $y' = (\cos x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \frac{sen\, x.\ln x}{\cos x}\right)$

$y = e^{\sqrt{\ln x}}$ R: $y' = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$

$y = (\ln x)^{\text{sen } x}$ R: $y' = (\ln x)^{\text{sen } x}\left(\cos x.\ln(\ln x) + \frac{sen\, x}{x.\ln x}\right)$

$y = e^{\ln x^2}$ R: $y' = \frac{2e^{\ln x^2}}{x}$

$y = (\ln x)^{\cos x}$ R: $y' = (\ln x)^{\cos x}\left(-sen\, x.\ln(\ln x) + \frac{\cos x}{x.\ln x}\right)$

$y = e^{\ln^2 x}$ R: $y' = \frac{2.\ln x.e^{\ln^2 x}}{x}$

$y = e^{sen\, 2x}$ R: $y' = 2\cos 2x.e^{sen\, 2x}$

$y = \sqrt[senx]{x}$ R: $y' = \sqrt[senx]{x}\left(\frac{\text{sen x - x.ln x.cos x}}{\text{x.sen}^2\text{x}}\right)$

$y = e^{\cos 2x}$ R: $y' = -2.e^{\cos 2x}.sen\, 2x$

$y = \sqrt[\cos x]{x}$ R: $y' = \sqrt[\cos x]{x}\left(\frac{\cos x + x.\ln x.\text{sen } x}{x.\cos^2 x}\right)$

$y = e^{\ln 2x}$ R: $y' = \frac{e^{\ln 2x}}{x}$

$y = \sqrt[x]{\text{sen x}}$ R: $y' = \sqrt[x]{\text{sen x}}\left(\frac{\text{x.cos x - sen x.ln(sen x)}}{\text{x}^2\text{sen x}}\right)$

$y = e^{x\, senx}$ R: $y' = e^{x\, senx}(\text{sen x} + \text{x.cos x})$

$y = \sqrt[x]{\cos x}$ R: $y' = \sqrt[x]{\cos x}\left(\frac{\text{- x.sen x - cos x.ln(cos x)}}{\text{x}^2\cos x}\right)$

$y = e^{x\cos x}$ R: $y' = e^{x\cos x}(\cos x - \text{x.sen x})$

195. Implícitas

$x\, sen\, y = e^{y}$ R: $y' = \frac{\text{sen y}}{e^y - x\cos y}$

$y\, sen\, x = e^{y}$ R: $y' = \frac{y.\cos x}{e^y - \text{sen x}}$

$x\cos y = e^{y}$ R: $y' = \frac{\cos y}{e^y + x\,\text{sen y}}$

$y\cos x = e^{y}$ R: $y' = \frac{\text{y.sen x}}{\cos x - e^y}$

$x\ln y = e^{y}$ R: $y' = \frac{y.\ln y}{y.e^y - x}$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$y\ ln\ x = e^{y}$ R: $y' = \dfrac{y}{x(e^{y} - \ln x)}$

$x\ sen\ y = e^{sen\ y}$ R: $y' = \dfrac{sen\ y}{e^{y}\cos y - x\cos y}$

$y\cos x = e^{sen\ y}$ R: $y' = \dfrac{y.sen\ x}{\cos x - e^{seny}\cos y}$

$y\ sen\ x = e^{sen\ y}$ R: $y' = \dfrac{y.\cos x}{e^{seny}\cos y - sen\ x}$

$x\ sen\ y = e^{\cos y}$ R: $y' = \dfrac{-sen\ y}{x\cos y + e^{\cos y} sen\ y}$

$y\ sen\ x = e^{\cos y}$ R: $y' = \dfrac{-y.\cos x}{sen\ x + e^{\cos y} sen\ y}$

$x\cos y = e^{sen\ y}$ R: $y' = \dfrac{\cos y}{e^{sen\ y}\cos y + x\ sen\ y}$

$x\cos y = e^{\cos y}$ R: $y' = \dfrac{\cos y}{x\ sen\ y - e^{\cos y} sen\ y}$

$y\cos x = e^{\cos y}$ R: $y' = \dfrac{y.sen\ x}{\cos x + e^{\cos y}\ sen\ y}$

$x\ sen\ y = sen\ x$ R: $y' = \dfrac{\cos x - sen\ y}{x.\cos y}$

$y\ sen\ x = sen\ y$ R: $y' = \dfrac{y.\cos x}{\cos y - sen\ x}$

$y\cos x = sen\ x$ R: $y' = \dfrac{\cos x - y.sen\ x}{\cos x}$

$x\cos y = sen\ x$ R: $y' = \dfrac{\cos y - \cos x}{x.sen\ y}$

$y\cos x = sen\ y$ R: $y' = \dfrac{y.sen\ x}{\cos x - \cos y}$

$x\cos y = \cos x$ R: $y' = \dfrac{\cos y + sen\ x}{x.sen\ y}$

$y\cos x = \cos y$ R: $y' = \dfrac{y.sen\ x}{\cos x + sen\ y}$

196. Misceláneas

$y = (x^{2} - 2x + 2)e^{x}$ R : $y' = x^{2} e^{x}$

$y = \dfrac{x^{2}}{\ln x}$ R : $y' = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^{2} x}$

$y = x^{3}\ln x - \dfrac{x^{3}}{3}$ R : $y' = 3x^{2}\ln x$

$y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$ R : $y' = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^{2}} - \dfrac{2}{x^{2}}$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$y = \log_2 x$	R : $y' = \dfrac{1}{x\ln 2}$
$y = \ln x \log x - \ln a \log_a x$	R : $y' = \dfrac{2\ln x}{x\ln 10} - \dfrac{1}{x}$
$y = (2a + 3bx)^2$	R: $y' = 2ab + 18b^2 x$
$y = (3 + 2x^2)^4$	R: $y' = 16x(3 + 2x^2)^3$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	R: $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = 2x + 5\cos^3 x$	R: $y' = 2 - 15\cos^2 x \operatorname{sen} x$
$y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$	R: $y' = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}$
$y = \cos(ax + b)$	R: $y' = -a \operatorname{sen}(ax + b)$
$y = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + b)$	R : $y' = \operatorname{sen}(2t + b)$
$y = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$	R : $y' = -2\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$
$y = -\dfrac{1}{20}\cos(5x^2) - \dfrac{1}{4}\cos x^2$	R : $y' = x\cos 2x^2 \operatorname{sen} 3x^2$
$y = 5e^{-x^2}$	R: $y' = -10x e^{-x^2}$
$y = x^2\, 10^{2x}$	R: $y' = 2x\, 10^{2x}(1 + x\ln 10)$
$y = \ln(2x + 7)$	R: $y' = \dfrac{2}{2x + 7}$
$y = \log \operatorname{sen} x$	R: $y' = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x \ln 10}$
$y = \ln(1 - x^2)$	R: $y' = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$
$y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$	R: $y' = \dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{1}{x\ln x}$
$y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5)$	R: $y' = \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$
$y = tg^2(5x)$	R: $y' = tg\, 5x . \sec^2 5x$
$y = tg3x ? tg\, x + x \;\; \dfrac{1}{3}tg^3 x - tg\, x + x$	R: $y' = tg^4 x$
$y = \sqrt{e^{ax}}$	R: $y' = \dfrac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$
$y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$	R: $y' = \operatorname{sen} 2x . e^{\operatorname{sen}^2 x}$

y = x^{senx} R: $y' = x^{sen\,x}(\frac{sen\,x}{x} + cos\,x.ln\,x)$

y = $(cos\,x)^{sen\,x}$ R: $y' = (cos\,x)^{sen\,x}.(cos\,x.ln\,cos\,x - sen\,x.tg\,x)$ y'

EJERCICIOS VARIADOS SOBRE DERIVADAS:

197. Hallar la primera derivada y', de las funciones siguientes:

y = $\frac{1}{\ln x}$ R: y' = $-\frac{1}{x.\ln^2 x}$

y = x^{x^2} R: y' = $x^{x^2}(2x.\ln x + x)$

$x = -cos\sqrt{y}$ R: y' = $\frac{2\sqrt{y}}{sen\sqrt{y}}$

$ln\,y = sen\,x$ R: $y' = y\,cos\,x$

$y = sen(e^x)$ R: $y' = e^x\,cos(e^x)$

Demostrar que la primera derivada (y') de la función: $\ln y + \frac{x}{y} = 5$; es: y' = $\frac{y}{x - y}$

y = $\frac{1}{\cos x}$ R: y' = $\frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$

y = $x^{\sqrt{x}}$ R: y' = $x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$

x = $sen\sqrt{y}$ R: y' = $\frac{2\sqrt{y}}{\cos\sqrt{y}}$

$ln\,y = cos\,x$ R: $y' = -y\,sen\,x$

Demostrar que la primera derivada (y') de la función: y = $e^{y/x}$; es: y' = $\frac{y^2}{x(y - x)}$

y = $\frac{1}{\text{sen}\,x}$ R: $-\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

y = $x^{\ln x}$ R: $x^{\ln x}.2\frac{\ln x}{x}$

$x = sen(ln\,y)$ R: $\frac{y}{\cos(\ln y)}$

$cos\,y = sen\,x$ R: $-\frac{\cos x}{\text{sen}\,y}$

y = $\frac{2x^2 + 2x + 1}{e^{2x}}$ R: $-\frac{4x^2}{e^{2x}}$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$y = 3^{\ln x}$ R: $3^{\ln x}\dfrac{\ln 3}{x}$

Demostrar que la primera derivada (y') de la función: $y = x \ln y$; es: $y' = \dfrac{y^2}{x(y-x)}$

$y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ R: $-\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$y = x.\ln x - x$ R: $\ln x$

$x = e^{xy}$ R: $\dfrac{1-y.e^{xy}}{xe^{xy}}$

Demostrar que si: $y = \ln\sqrt{x}$ entonces se cumple la igualdad: $2\,x\,y' = 1$

$y = \cos\sqrt{x}$ R: $-\dfrac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$y = \dfrac{\ln x}{x} - 1$ R: $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y = e^{xy}$ R: $\dfrac{y.e^{xy}}{1-x.e^{xy}}$

Demostrar que si: $e^{y} = \cos x$ entonces se cumple la igualdad: $y' + tg\ x = 0$

$y = \ln\sqrt{x}$ R: $\dfrac{1}{2x}$

$y = x.e^{x} - x$ R: $x.e^{x}$

$x.y = e^{y}$ R: $\dfrac{y}{e^{y}-x}$

Demostrar que si: $\ln y = \sqrt{x}$ entonces se cumple la igualdad: $2\sqrt{x}\,.y' = y$

$y = x^2 \ln x$ R: $y' = 2x\ln x + x$

$y = (1+x^2)\,e^{x}$ R: $y' = e^{x}\,(x^2 + 2x + 1)$

$y = e^{\frac{1}{x}}$ R: $y' = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

$y = e^{-x^2} + 2$ R: $y' = -2\,x\,e^{-x^2}$

$y = x^{\frac{1}{x}}$ R: $y' = x^{1/x}.\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y = \ln sen\ x^2$ R: $y' = 2\,x\,cotg\ x^2$

$x = \sqrt{x+y}$ R: $y' = 2\sqrt{x+y} - 1$

$\dfrac{y}{x} = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ R: $y' = \dfrac{y}{x}\ \dfrac{x+y}{x-y}$

198. Regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}$$ R: ∞

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$ R: 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$$ R: 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{sen} mx)}{\ln(\operatorname{sen} x)}$$ R: 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$$ R: 2

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^5}$$ R: ∞

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$$ R: 0

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^x}$$ R: 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$$ R: -2

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$$ R: ∞

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 . \cos x}{\cos x - 1}$$ R: -2

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$$ R: 0

EXTREMOS DE FUNCIONES

199- Sea la función $y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x$, determinar los puntos de máximo y mínimo local.

Respuesta: P(2; 14) punto de máximo y Q(3; 23.5) punto de mínimo

200- Para la función $y = x^3 - 3x + 2$, encontrar los puntos extremos locales y los de inflexión.

Respuesta: I(0; 2) punto de inflexión; P(1; 0) punto de mínimo y Q(−1; 4) punto de máximo

201- Para la función $y = x^3 + 6x^2 + 12x$, encontrar los puntos extremos locales y los de inflexión.

Respuesta: I(−2;−1) punto de inflexión; No se pueden determinar máximos ni mínimos por la segunda derivada.

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

202- Determinar dos números "x" e "y" de forma tal que su suma sea 80 y el producto de los mismos sea el mayor posible.
Respuesta: x = 40; y = 40

203- Se quiere fabricar un vaso de forma cilíndrica que tenga $125\pi\ cm^3$ de volumen. ¿Cuál debe ser el radio de la base del vaso que produzca un gasto mínimo de material?
Respuesta: R = 5; h = 5

204- Entre todos los rectángulos de área igual a 36 cm^2, ¿cuál es el de menor perímetro?
Respuesta: el cuadrado de lado 6 cm es el de menor perímetro

205- Demostrar que entre todos los rectángulos que tengan el mismo perímetro, el cuadrado es el de mayor área.

206- En una fábrica el costo total de fabricación de "x" unidades de un producto, está dado por la fórmula: $C(x) = 3\,x^2 + x + 48$. ¿Cuántas unidades deberán ser fabricadas para que el costo medio sea mínimo?
Respuesta: x = 4

207- Determinar el punto de la curva $y^2 = 4\,x$, que esté más próximo del punto P (2; 1)
Respuesta: M (1; 2)

INTEGRALES

208. Integración por sustitución ó cambio de variable

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ R: $2\sqrt{x} + C$

$I = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}\,dx$ R: $2\sqrt{e^x + 1}$

$I = \int e^x \cos(e^x)dx$ R: $sen\,(e^x) + C$

$I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$ R: $2\sqrt{\operatorname{sen} x}$

$I = \int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,dx$ R: $e^{sen\,x} + C$

$I = \int e^{\cos x} \operatorname{senx} dx$ R: $-e^{cos\,x} + C\,\mathrm{C}$

$I = \int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$ R: $e^{tg\,x} + C$

$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1}\,dx$ R: $ln(sen\,x + 1) + C$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$I = \int \frac{\text{sen x cos x}}{\text{sen}^2 x + 1} dx$ R: $\frac{1}{2}\left[ln\left(sen^2\ x + 1\right) \right] + C$

$I = \int \frac{\text{cos x sen x}}{\cos^2 x + 1} dx$ R: $-\frac{1}{2}\left[ln(cos^2 x + 1\right] + C$

$I = \int x\,(2x + 5)^{10}\,dx$ R: $\frac{(2x+5)^{12}}{48} - \frac{(2x+5)^{11}}{44} + C$

$I = \int \frac{\text{sen x}}{\cos x + 1} dx$ R: $-\,ln[cos\ x + 1] + C$

$I = \int \frac{\text{sen x}}{\sqrt{\cos x}} dx$ R: $-2\sqrt{\cos x}$

$I = \int e^x \text{sen}(e^x)dx$ R: $-\,cos\,(e^x\,) + C$

$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2}$ R: $-\frac{1}{3(x-1)^3} + C$

$I = \int \frac{dx}{x \ln x}$ R: $ln\,(ln\ x) + C$

$I = \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ R: $-\frac{1}{3(\ln x)^3} + C$

$I = \int (2x + 5)^{15}\,dx$ R: $\frac{(2x+5)^{16}}{32} + C$

$I = \int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx$ R:

$-\frac{2}{3}(1 + \sqrt{x})^3 + (1 + \sqrt{x})^2 - 4(1 + \sqrt{x})$

$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$ R: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 1} + C$

$I = \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$ R: $\frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} + C$

$I = \int \frac{dx}{x\,(\ln x + 1)}$ R: $ln\,(ln\ x + 1) + C$

$I = \int x\,2^{-x}\,dx$ R: $-\frac{x.2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln x)^2} + C$

$I = \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}$ R: $ln\,(4x) - ln\ [ln\,(4x)]$

209. Integración por partes

$I = \int x \text{ sen x } dx$ R: $sen\ x - x.cos\ x + C$

$I = \int x \cos 3x\,dx$ R: $\frac{1}{3}\text{xsen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$

EJERCITARIO: MATEMÁTICA III

$I = \int \frac{x}{e^x}\, dx$ R: $-x\,.\,e^{-x} - e^{-x} + C$

$I = \int x^2 \ln x\, dx$ R: $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

$I = \int e^{2x}\ \text{sen}\, 2x\, dx$ R: $\frac{e^{2x}}{4}(\text{sen}\, 2x - \cos 2x) + C$

$I = \int e^{3x}\ \text{sen}\, 3x\, dx$ R: $\frac{e^{3x}}{6}(\text{sen}\, 3x - \cos 3x) + C$

$I = \int e^{-x}\ \text{sen}\, x\, dx$ R: $-\frac{x}{2}(sen\ x - cos\ x)$

$I = \int e^{-x} \cos x\, dx$ R: $-\frac{x}{2}(sen\ x + cos\ x)$

$I = \int x\, \text{sen}\,(-x)\, dx$ R: $x\, cos\,(-x) + sen\,(-x) + C$

$I = \int x \cos(-x)\, dx$ R: $-x\, sen\,(-x) + cos\,(-x) + C$

$I = \int \ln^2 x\, dx$ R: $x\, ln^2 x - 2\, x\, ln\, x + 2\, x + C$

$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ R: $2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}$

$I = \int \text{sen}\,(\ln x)\, dx$ R: $\frac{x}{2}[sen(ln\ x) - cos(ln\ x)]$

210. Integración por descomposición en fracciones simples

$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ R: $\ln \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} + 1} + C$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ R: $\ln \frac{\sqrt{e^x+1} - 1}{\sqrt{e^x+1} + 1} + C$

$I = \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ R: $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x-3}{x-1}\right] + C$

$I = \int \frac{(2x+3)dx}{x(x-1)(x+2)}$ R: $\ln\left[\frac{(x-1)^{5/2}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}\right] + C$

$I = \int \frac{(x+7)dx}{x^2+2x-8}$ R: $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x-2)^3}{x+4}\right] + C$

$I = \int \frac{(1-x^{3)})dx}{x^2+4x+3}$ R: $4x - \frac{x^2}{2} + \ln[x+1] - 14\ln[x+3] + C$

$I = \int \frac{(4x^2 - 3x - 2)dx}{x(x^2-4)}$ R: $\frac{1}{2}\ln\left[x.(x+2)^5(x-2)^2\right] + C$